



Série d'exercices sur : CONIQUES : Parabole, Ellipse, Hyperbole



Exercice 0 [Application directe du cours]

- A) Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit la courbe $(\mathcal{P}) : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = \frac{1}{25}(3x + 4y + 2)^2$. montrer que $(\mathcal{P})$ est une parabole et déterminer ses éléments caractéristiques.
- B) Construire la directrice $(\mathcal{D})$ d'une parabole $(\mathcal{P})$ en connaissant le foyer F de $(\mathcal{P})$ et deux tangentes $(\mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}_2)$ à $(\mathcal{P})$.
- C) Construire la directrice $(\mathcal{D})$ d'une parabole $(\mathcal{P})$ en connaissant le foyer F de $(\mathcal{P})$ et un point A de $(\mathcal{P})$ et sachant que $(\mathcal{D})$ est parallèle à une droite donnée (Δ) .
- D) Soit une affinité orthogonale $\mathcal{A}(\mathcal{D}, \frac{1}{2})$ et $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon 5. tracer l'image de $(\mathcal{C})$ par $(\mathcal{A})$.
- E) Montrer que si $a > b$, alors l'ellipse $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de son cercle principal $\mathcal{C}(O, a)$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$.
- F) On considère l'ellipse $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $a > b$. M et N sont deux points variables de (E) tels que $(OM) \perp (ON)$.
- Montrer que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ est constante
 - Soit H le projeté orthogonal de O sur (MN) . déterminer le lieu géométrique de H lorsque M et N varient sur (E) de telle sorte que $(OM) \perp (ON)$.
- G) Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit la courbe $(\Gamma) : 13x^2 + 13y^2 - 10xy = 36$ déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice : 1

Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice.

- a) $y^2 = 4x$; b) $x^2 = 6y$; c) $y^2 = -8x$; d) $x^2 = -3y$

- b) Montrer que les courbes (P_1) , (P_2) et (P_3) d'équations respectives : $y^2 = 5x - 1$, $x^2 - 4y + 2x - 1 = 0$ et $y^2 - x + y = 0$ sont des paraboles dont on précisera les éléments caractéristiques.
- c) Vérifier que le point $A(1,2)$ appartient à (P_3) et déterminer l'équation de la tangente T à (P_3) en A .
- d) Déterminer les coordonnées du point B appartenant à (P_3) tel que la tangente à (P_3) en B soit perpendiculaire à T .

Exercice : 2

1) Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets, l'équation d'une directrice et l'excentricité.

- a) $4x^2 - 36y^2 = 121$ b) $-9x^2 + 4y^2 = 196$
c) $2x^2 - 2y^2 = 1$;

2) Identifier les ensembles des points $M(x, y)$ tels que :

- a) $x = \frac{2}{\cos t}$ et $y = 3 \tan t$ et $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
b) $x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$ et $y = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ $t \in \mathbb{R}^*$
c) $x = \frac{1}{\cos 2t}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t$ et $t \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Exercice : 3

1) Identifier les ensembles des points $M(x, y)$ tels que :

- a) $x = 5 \cos t$ et $y = 3 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$
b) $x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ et $y = \frac{e^t}{e^{2t}+1}$, $t \in \mathbb{R}$

Exercice : 4

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation :

- $x^2 + 4y^2 + 2x = 1$
- $x^2 - 8y^2 + 2x - 16 = 1$
- $x^2 + 4y^2 + 2x = 1$
- $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$
- $y^2 - 4y = 2x - \frac{x^2}{m}$, $m \in \mathbb{R}^*$

Exercice 5

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (C) la courbe d'équation : $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$.

1. Démontrer que (C) est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, foyers et directrices associées, etc ... Tracer (C).
2. Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$. On désigne par $d(M,D)$ la distance du point M à la droite (D). Soit P le point de coordonnées $(-4,6)$; $d(M,P)$ désigne la distance de M à P. Quel est l'ensemble des points M du plan (P) tels que $d(M,P) = 2 d(M,D)$?

Exercice 6

Soit α un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :
(E) $z^2 \sin^2 \alpha - 4z \sin \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0$.

1. Résoudre (E).
2. On désigne par M' et M'' les images des racines z' et z'' de l'équation (E) dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe.

Montrer que, lorsque α varie, l'ensemble des points M' et M'' est une branche d'hyperbole (H).

Préciser les éléments caractéristiques de (H) et dessiner la branche d'hyperbole en question.

Exercice 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble C_α des points M de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ telles que } x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$$

1. Discuter en fonction de α du genre de la conique.
2. Préciser l'ensemble C_0 .
3. Préciser les ensembles C_1 et C_{-1} .
4. On considère le repère $R_\theta(O, \vec{u}, \vec{v})$ obtenu par

rotation d'angle θ de R, on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de

M dans ce repère. Comment choisir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

pour que le terme en XY de l'équation C_α dans ce repère soit nul ? Quelle est alors l'équation de C_α .

5. En déduire les paramètres a, b, c et e lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

Exercice 8

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble (C) des

points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$$25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2 \quad (1)$$

1-En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (C) est une conique de foyer 0 et de directrice la droite Δ d'équation $x = \frac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de

(C). Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) et θ une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

2-a Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

$$\text{b- Démontrer que } OM = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}.$$

3- On suppose ici que θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

. La droite (OM) coupe Δ en 1 et recoupe (C) en un point M' .

a- Démontrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

$$\text{b- Démontrer que } \frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}.$$

Exercice 9

On appelle Γ l'ensemble des points du plan (P) dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0.$$

1° On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on considère la

transformation g de (P) dans (P) qui, à tout point M d'affixe z, associe le point g(M) d'affixe jz.

Montrer que g est une rotation de centre O et de d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2° On désigne par (H) l'ensemble des points M de (P) d'affixe z vérifiant $\operatorname{Re}(z^2) = 1$. Définir la nature de ensemble (H) et le tracer.

3° Soit M un point d'affixe z.

Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à l'ensemble Γ si et seulement si $\operatorname{Re}[(jz)^2] = 1$.

4° Montrer que (H) est l'image de Γ par la transformation g.

En déduire la nature de Γ et tracer Γ sur la figure précédente.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $2x^2 + y^2 + xy = 10$.

1° Montrer qu'il existe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'équation de (E) est de la

forme $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

2° En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E). Construire (E).

Exercice 11 Construction géométrique des foyers et directrice

1° cas de l'ellipse : Soit (E) l'ellipse d'équation réduite

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < b < a$, dans le repère

orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et A' les sommets sur

l'axe focale, F et F' les foyers. La

perpendiculaire en F à l'axe focale coupe le cercle (C) de diamètre [AA'] en U et U', la tangente en U à (C) coupe l'axe focal en T.

Démontrez que T est le pied, sur l'axe focal, de la directrice associée à F.

2° cas de l'hyperbole : Soit (H) l'hyperbole

d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère

orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et A' les sommets de

(H), F et F' les foyers, (C) le cercle de diamètre [AA'], (Δ) et (Δ') les asymptotes. La tangente à

(C) coupe (Δ) en E.

a) Calculez OE. Déduisez-en une construction de F et F', à la règle et au compas, à partir de A et A' et des asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points communs à (C), (Δ) et (Δ').

3° Appliquez les résultats précédents à la construction géométrique des foyers et directrices des coniques d'équation :

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ et $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Exercice 12

- 1) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan (P) dont l'affixe z vérifie :

$10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$ où $\bar{z}$ est le nombre

complexe conjugué de z. Indiquer ses foyers F et F', ainsi que ses directrices.

- 2) Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2, et de la rotation de centre O et

d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation de (E') image de (E) par f.

Montrer que (E') est une ellipse de foyers f(F) et f(F').

Exercice 13

Soit D une droite du plan et F un point dont la distance à D est égale à 3, l'unité étant le centimètre.

Soit Δ la droite passant par F et orthogonale à D

On considère θ un réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

1. / Soit Γ_θ l'ensemble des points M du plan

tels que $\frac{MF}{MH} = \cos \theta$, H désigne le projeté

orthogonal de M sur D.

Donner suivant les valeurs de θ la nature de Γ_θ .

2. / Tracer Γ_θ cas où $\theta = 0$

3. / a) Soit $\theta = \frac{\pi}{3}$. Déterminer les sommets A et

A' de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ situés sur Δ , le centre O et le

deuxième foyer F', de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$. Tracer $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$.

- b) Déterminer l'équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$

dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la

droite Δ .

Exercice 14

Soit (I) une parabole de foyer F (-1, 0) et de directrice (D) : $y = x$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne de (I).

- 2) Donner l'équation réduite de (I).

Exercice 15

- 1) On donne la courbe (E) d'équation :

$5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$.

- a) Montrer que (E) est une conique et déterminer sa nature

- b) Déterminer le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité de cette Conique.

- 2) On considère la courbe H d'équation :

$x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$.

- a) Montrer que H admet un centre de symétrie, noté Ω , et que H est une conique, dont on déterminera la nature.

- b) Déterminer les sommets, les foyers, les directrices, l'excentricité et les asymptotes de H.

- 3) On donne : (P1) : $x^2 - x + 2y + 2 = 0$ et (P2) :

$y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Donner l'équation réduite de ces courbes, et en déduire la nature, ainsi que les éléments

Caractéristiques de chacune d'elles.

Exercice 16

A tout point M d'affixe z non nulle du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- 1) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel.
- 2) On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.
 - a) Vérifier que : $z = 2 e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).
 - b) Démontrer que M' décrit une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 17

Dans le plan complexe orienté muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité 2 cm, on considère la courbe (Σ) d'équation :

$$4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 = 0.$$

- 1) a) déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Σ) .
- b) Tracer (Σ) .
- 2) Soit M un point de (Σ) d'affixe $z = x + iy$, x et y étant des réels.
 - a) Démontrer que : $|z| = \frac{1}{2}(3 - y)$.
 - b) En déduire que : $|z| = \frac{3}{2 + \cos \theta}$, θ étant un argument de z .
- 3) a) Soit M' et M'' deux points de d'affixes respectives z' et z'' d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$. Calculer la distance M'M'' en fonction de θ .
- b) Déterminer M'M'' si $OM' = 2$.

Exercice 18

Soit $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace orienté, $M(x, y, z)$ un point de l'espace, H son projeté orthogonal sur la droite (AB) .

- 1) On désigne par G l'isobarycentre de A, B et C.
- a) Vérifier que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC) .
- b) Vérifier que $\vec{MA} \cdot \vec{OG} = \vec{MH} \cdot \vec{OG}$; en déduire que $|\vec{MA} \cdot \vec{OG}| = \frac{1}{\sqrt{3}} MH$.

- c) Calculer en fonction de x, y et z la distance MH du point M au plan (ABC) .
- 2) a) Exprimer MK en fonction $\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|$.
- b) En déduire : $MK = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2z^2 + (1 - x - y)^2}$.
- 3) On se place dans le plan (OAB) et on considère l'ensemble (E) des points de ce plan qui sont équidistants du point O et du plan (ABC) .
 - a) Montrer que (E) ne contient aucun point de la droite (AB) .
 - b) Soit M un point de (OAB) n'appartenant pas à (AB) . Calculer la valeur du rapport $\frac{MH}{MK}$.
 - c) En déduire que (E) est une conique dont donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

Exercice 19 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe (P) définie

$$\text{paramétriquement par : } \begin{cases} x = \frac{1}{4}t^2 + t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 1) a) Montrer qu'en tout point M(t) de paramètre t de (P) passe une tangente (T) dont on déterminera les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}(t)$ en fonction de t.
- b) Déterminer une équation cartésienne de (P) et en déduire que (P) est une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice.
- c) Soit m le projeté orthogonal de M(t) sur l'axe des ordonnées et F le point de coordonnées (2, 0).
Montrer que la tangente (T) à (P) en M(t) est la médiatrice du segment [Fm].
- 2) On veut démontrer géométriquement certaines propriétés de la tangente (T) à la parabole (P) en un point M.
 - a) Soit M un point de (P) distinct de son sommet, (T) la tangente à (P) en M. On note T_0 le point d'intersection de (T) avec la directrice de (P). A l'aide de la réflexion S_T d'axe (T), démontrer que le triangle T_0FM est rectangle.
 - b) Soient (T) et (T') deux tangentes à (P) non parallèles à la directrice, Ω leur point d'intersection.
En utilisant la composée $S_T \circ S_{T'}$ des réflexions d'axes (T) et (T'), démontrer que (T) et (T') sont perpendiculaires si et seulement si Ω appartient à la directrice de (P).